Ćwiczenie 2

a) Oblicz: $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, jeśli $\sin\alpha = 0{,}8$ oraz α jest kątem ostrym.

Zapisujemy dane.

$sin\alpha = 0{,}8$

Stosujemy wzór znany jako jedynka trygonometryczna.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$0{,}8^2 + cos^2\alpha = 1$$

$$0{,}64 + cos^2\alpha = 1$$

$$cos^2\alpha = 1 - 0{,}64$$

$$cos^2\alpha = 0.36/\sqrt{}$$

$$cos\alpha = 0{,}6 \ lub \ cos\alpha = -0{,}6$$

Ponieważ kąt jest ostry, w takim razie ujemne wartości będziemy zawsze odrzucać.

Ze wzoru $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ obliczamy

$$tg\alpha = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Z dowolnego wzoru

3. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Obliczamy

$$ctg\alpha = \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

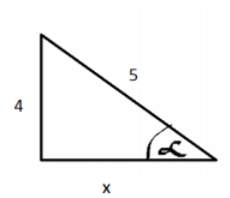
Druga metoda

Dane $sin\alpha = 0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ zapisujemy w postaci ułamka zwykłego. Następnie rysujemy trójkąt prostokątny.

Ponieważ $sin\alpha = \frac{4}{5}$, a sinus to

Stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta do długości przeciwprostokątnej nazywamy **sinusem** kąta.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$



Z tw. Pitagorasa obliczymy trzeci bok.

$4^2 + x^2 = 5^2$ *po obliczeniach* $x = 3$

Mając wszystkie boki wyznaczymy cos, tg i ctg.

Zatem $cos\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$, $tg\alpha = \frac{4}{3}$, $ctg\alpha = \frac{3}{4}$

Zadanie 1

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego α, jeżeli:

≫ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ≫ $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ≫ $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$ ≫ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Zadanie 2

Oblicz $a+b$, gdy $a = 1 - \cos^2\alpha$, $b = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\alpha = 45°$.

Oblicz $\frac{a}{b}$, gdy $a = \cos^2\alpha - 1$, $b = \sin^2\alpha - 1$ dla $\alpha = 30°$.

Oblicz $a-b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

ROZWIĄZANIA:

Zadanie 1

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego α i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Rozwiązanie:

Dla kąta α ostrego, $\alpha \in (0, 90^o)$, wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie.
Widać to w tej tabelce.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ≫$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\frac{9}{25} + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \overset{≫}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \overset{≫}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

Odp. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = 1\frac{1}{3}$

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego α i $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Dla kąta α ostrego, $\alpha \in (0, 90^o)$, wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie.
Widać to w tej tabelce.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ≫$$
$$\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \overset{≫}{=} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \overset{≫}{=} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Odp. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego α i $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$.

Rozwiązanie:

Dla kąta α ostrego, $\alpha \in (0, 90^\circ)$, wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie.
Widać to w tej tabelce.

$$\operatorname{ctg}\alpha \overset{\gg}{=} \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\gg \begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \sqrt{5} \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \sqrt{5} \quad / \cdot \cos\alpha \\ \sin\alpha &= \sqrt{5}\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \quad \gg \\ (\sqrt{5}\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\ 5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ 6\cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{6} \\ \cos\alpha &= \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \sqrt{5}\cos\alpha \\ \sin\alpha &= \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \sin\alpha &= \frac{\sqrt{30}}{6} \end{aligned}$$

Odp. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych dla kąta ostrego α i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Rozwiązanie:

Dla kąta α ostrego, $\alpha \in (0, 90^o)$, wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych są dodatnie.
Widać to w tej tabelce.

$$\operatorname{tg}\alpha \overset{\gg}{=} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 1 : \frac{\sqrt{2}}{3} = 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\gg \begin{aligned} \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \quad / \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \quad \gg \\ \sin^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\alpha\right)^2 &= 1 \\ \sin^2\alpha + \frac{2}{9}\sin^2\alpha &= 1 \quad / \cdot 9 \\ 9\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha &= 9 \\ 11\sin^2\alpha &= 9 \quad / : 11 \\ \sin^2\alpha &= \frac{9}{11} \\ \sin\alpha &= \sqrt{\frac{9}{11}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{3\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\alpha \\ \cos\alpha &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{11} = \frac{\sqrt{22}}{11} \end{aligned}$$

Odp. $\sin\alpha = \frac{3\sqrt{11}}{11}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 2

Oblicz $a+b$, gdy $a = 1-\cos^2\alpha$, $b = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$ dla $\alpha = 45^\circ$.

Rozwiązanie:

Pierwszy sposób:

$$
\begin{aligned}
a+b &= 1-\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \\
&= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + (\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha)^2 = \\
&= \sin^2\alpha + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha\right)^2 = \\
&= \sin^2\alpha + (\sin\alpha)^2 = \\
&= \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = \\
&= 2\sin^2\alpha = 2(\sin\alpha)^2 = 2(\sin 45^\circ)^2 = \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Drugi sposób:

$$
\begin{aligned}
a &= 1-\cos^2\alpha = 1-(\cos\alpha)^2 = 1-(\cos 45^\circ)^2 = \\
&= 1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1-\frac{2}{4} = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &= \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = (\operatorname{tg}\alpha)^2 \cdot (\cos\alpha)^2 = (\operatorname{tg} 45^\circ)^2 \cdot (\cos 45^\circ)^2 = \\
&= 1^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Odp. $a+b = 1$

Oblicz $\frac{a}{b}$, gdy $a = \cos^2\alpha - 1$, $b = \sin^2\alpha - 1$ dla $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie:

Pierwszy sposób:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1} = \gg \\
&= \frac{\cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \\
&= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \\
&= \frac{-\sin^2\alpha}{-\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \\
&= (\operatorname{tg}\alpha)^2 = (\operatorname{tg}30^\circ)^2 \overset{\gg}{=} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Drugi sposób:

$$a = \cos^2\alpha - 1 = (\cos\alpha)^2 - 1 = (\cos 30^\circ)^2 - 1 \overset{\gg}{=} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

$$b = \sin^2\alpha - 1 = (\sin\alpha)^2 - 1 = (\sin 30^\circ)^2 - 1 \overset{\gg}{=} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Odp. $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$

Oblicz $a - b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60^\circ$.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
a &= \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \\
&= (\sin\alpha)^4 - (\cos\alpha)^4 = (\sin 60^\circ)^4 - (\cos 60^\circ)^4 = \\
&\overset{\gg}{=} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2 = \\
&= 1 - 4(\sin 60^\circ)^2(\cos 60^\circ)^2 \overset{\gg}{=} 1 - 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \\
&= 1 - 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$a - b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Odp. $a - b = \frac{1}{4}$